

## APPENDIX G. CURVATURE AND ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY

A good reference is the book of Guillemin and Sternberg [2].

**Les équations de Maxwell.** La théorie de l'électromagnétisme affirme qu'une particule de charge  $q$  plongée dans l'espace physique, assimilé à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  par le choix d'un référentiel galiléen, subit une force proportionnelle à  $q$ , de la forme

$$(16) \quad f = q(E + v \wedge B),$$

où  $v$  est la vitesse de la particule et où  $E$  et  $B$  sont deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ , qualifiés respectivement d'*électrique* et de *magnétique*.

Dans certains milieux matériels, notamment dans le vide, l'expérience montre que les champs  $E$  et  $B$  possèdent les propriétés remarquables suivantes :

- (1) *Loi de Gauss (1835)*.<sup>16</sup> Pour tout volume  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  (ouvert à bord  $\partial V$  régulier), le flux de  $E$  à travers  $\partial V$  est proportionnel à la charge totale  $Q$  incluse dans  $V$  :

$$\oint_{\partial V} E \cdot dS = 4\pi Q.$$

D'après le théorème de Stokes, cette loi est équivalente à la version infinitésimale suivante :

$$(17) \quad \operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad (\text{équation de Maxwell-Gauss}),$$

où  $\rho$  est la fonction densité volumique de charge. En prenant une distribution de charge à symétrie sphérique et en calculant le flux du champ créé à travers des sphères de rayon  $r$ , on en déduit la loi de Coulomb : le champ  $E$  créé par une particule de charge  $Q$  a pour norme  $\|E\| = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ . La loi de Gauss décrit donc comment les charges électriques créent du champ électrique.

- (2) *Loi de Gauss pour le champ magnétique (1865)*. Le flux de  $B$  à travers  $\partial V$  est nul :

$$\oint_{\partial V} B \cdot dS = 0.$$

Autrement dit, les lignes du champ magnétique n'ont pas de source et il n'existe pas de monopôles magnétiques, analogues hypothétiques des charges électriques. (Les physiciens cherchent depuis longtemps à mettre en évidence de tels monopôles, dont l'existence rétablirait la symétrie entre les champs magnétique et électrique.) Infinitésimalement, on a

$$(18) \quad \operatorname{div} B = 0 \quad (\text{équation de conservation du flux magnétique}).$$

- (3) *Loi d'induction de Faraday (1831)*. Grâce à une série d'expériences minutieuses dues notamment à Faraday, Maxwell établit que, si  $S$  est une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  (à bord  $\partial S$  régulier), la circulation de  $E$  le long de  $\partial S$  vaut

$$\oint_{\partial S} E \cdot ds = -\frac{1}{c} \frac{d\phi_B}{dt}, \quad \phi_B = \iint_S B \cdot dS,$$

<sup>16</sup>Les dates indiquées sont largement arbitraires. La formulation est proche de celle de Maxwell.

où  $c$  est une constante qui sera ultérieurement identifiée à la vitesse de la lumière dans le vide ; la variation du flux du champ magnétique à travers une surface bordant une spire est une source de tension dans la spire. Infinitésimalement,

$$(19) \quad \text{curl } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{équation de Maxwell-Faraday}).$$

(4) *Loi de Maxwell-Ampère (1820)*. La circulation de  $B$  le long de  $\partial S$  vaut

$$\oint_{\partial S} B \cdot ds = 4\pi I + \frac{1}{c} \frac{d\phi_E}{dt}, \quad \phi_E = \iint_S E \cdot dS,$$

où  $I$  est le courant électrique passant à travers  $\partial S$ . Infinitésimalement,

$$(20) \quad \text{curl } B = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{équation de Maxwell-Ampère}),$$

où  $j$  est le champ de densité de courant électrique. Le premier terme du membre de droite a été mis en évidence expérimentalement par Ampère en 1820, et le second, sans lequel l'équation est violée par certains systèmes à spires, a été ultérieurement introduit par Maxwell pour raison théorique de symétrie.

**La forme électromagnétique.** Le principe de relativité veut que la force (16) subie par une particule ne dépende pas du référentiel galiléen choisi. Dans un référentiel se mouvant à la vitesse constante  $u \in \mathbb{R}^3$  par rapport au premier, les champs électrique  $E'$  et magnétique  $B'$  vérifient donc

$$E + v \wedge B = E' + (v - u) \wedge B' \quad (\forall v \in \mathbb{R}^3),$$

soit

$$E' = E + u \wedge B \quad \text{et} \quad B' = B.$$

Dans ce sens, les champs  $E$  et  $B$  ne sont pas d'existence propre indépendante l'une de l'autre, et font partie d'une entité commune, le *champ électromagnétique*.

D'autres considérations provenant de la théorie de la relativité (voir plus loin) conduisent à considérer ce champ comme une 2-forme différentielle sur l'*univers*  $\mathbb{U} = \mathbb{R}^4$  (espace-temps) ; bornons-nous ici à remarquer que le nombre de composantes des champs  $E$  et  $B$  est exactement la dimension  $6 = 4 \times 3/2$  de l'espace vectoriel des 2-formes extérieures en dimension 4. La *forme électromagnétique* est la 2-forme

$$F = c(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt \\ + B_z dx \wedge dy + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx.$$

La différentielle de  $F$  vaut

$$dF = c(-\partial_y E_x + \partial_x E_y + \partial_t B_z/c) dt \wedge dx \wedge dy \\ + c(-\partial_z E_y + \partial_y E_z + \partial_t B_x/c) dt \wedge dy \wedge dz \\ + c(-\partial_x E_z + \partial_z E_x + \partial_t B_y/c) dt \wedge dz \wedge dx \\ + (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Donc les deux équations de Maxwell intrinsèques (18,19) (c'est-à-dire celles qui ne dépendent pas des charges, ni des courants) sont équivalentes à :

$$(21) \quad dF = 0 \quad (\text{identité de Bianchi}).$$

La *métrique de Minkowski* de l'univers est  $-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Si l'on effectue des transformations formelles, on a intérêt à supposer les variables

$$x^0 = ict, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

réelles. Cela équivaut à introduire le temps imaginaire  $it$  ; c'est la *rotation de Wick* des physiciens. Avec ces notations,  $F$  vaut

$$F = \sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

et s'identifie à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & iE_x & iE_y & iE_z \\ -iE_x & 0 & B_z & -B_y \\ -iE_y & -B_z & 0 & B_x \\ -iE_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que l'opérateur de Hodge

$$\begin{array}{ccc} * : \wedge^k \mathbb{R}^4 & \xlongequal{\quad} & \wedge^{4-k} \mathbb{R}^4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \wedge^k \mathbb{R}^4 & \xlongequal{\quad} & \wedge^{4-k} \mathbb{R}^4 \end{array} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

associé à la métrique de Minkowski est caractérisé par l'égalité

$$\xi \wedge * \eta = \langle \xi, \eta \rangle dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

( $\xi, \eta \in \wedge^k \mathbb{R}^4$ ) ; en degré 2, on obtient  $*(dx^\alpha \wedge dx^\beta) = \pm dx^\gamma \wedge dx^\delta$ , où  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{0, 1, 2, 3\}$  et où  $\pm$  est la signature de la permutation  $(0, 1, 2, 3) \mapsto (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . L'image de  $F$  par  $*$  est

$$\begin{aligned} *F &= \sum_{\alpha < \beta} F_{\alpha\beta} [* (dx^\alpha \wedge dx^\beta)] \\ &= F_{01} dx^2 \wedge dx^3 - F_{02} dx^1 \wedge dx^3 + F_{03} dx^1 \wedge dx^2 \\ &\quad + F_{12} dx^0 \wedge dx^3 - F_{13} dx^0 \wedge dx^2 + F_{23} dx^0 \wedge dx^1 \\ &= -ic (B_x dx + B_y dy + B_z dz) \wedge dt \\ &\quad + i (E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d * F &= \sum_{\alpha < \beta} dF_{\alpha\beta} [* (dx^\alpha \wedge dx^\beta)] \\ &= ic (-\partial_x B_y + \partial_y B_x + \partial_t E_z / c) dt \wedge dx \wedge dy \\ &\quad + ic (-\partial_y B_z + \partial_z B_y + \partial_t E_x / c) dt \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + ic (-\partial_z B_x + \partial_x B_z + \partial_t E_y / c) dt \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + i (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Donc les deux équations de Maxwell extrinsèques (17,20) équivalent à

$$(22) \quad d * F = *4\pi i\varphi,$$

où  $\varphi = \rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$  est la 1-forme de courant. Dans le vide ( $\varphi = 0$ ), on obtient

$$(23) \quad d * F = 0 \quad (\text{équation de Yang-Mills commutative}).$$

**Le potentiel électromagnétique.** D'après le lemme de Poincaré, l'équation (21) équivaut à l'existence d'une 1-forme  $A$  localement dans  $\mathbb{R}^4$ , le *potentiel électromagnétique*, primitive de  $F$  :

$$F = dA.$$

L'équation (22) devient alors

$$d * dA = *4\pi i\varphi.$$

Le potentiel  $A$  est défini à une forme fermée près, donc, d'après le même lemme de Poincaré, à une forme exacte près. Une transformation admissible, de la forme

$$A \longmapsto A + df$$

où  $f$  est une fonction sur l'espace-temps, est une *transformation de jauge*.

Si l'espace physique est de dimension trois, le potentiel

$$A = \phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

se décompose en un potentiel scalaire  $\phi$  du champ électrique et un potentiel vecteur  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  du champ magnétique. Par une transformation de jauge dite *de Lorentz* on peut annuler  $\phi$  et  $\text{div } \vec{A}$ . L'équation (23) devient alors l'*équation des ondes de d'Alembert*

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Comme l'égalité  $F = dA$  s'écrit

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad B = \text{curl } \vec{A},$$

les champs  $E$  et  $B$  satisfont la même équation de d'Alembert, ce qui signifie que les champs électrique et magnétiques forment une *onde électromagnétique*, de célérité  $c$ .

**Le transport parallèle du champ bispinoriel de Dirac.** Pour géométriser la force électromagnétique, rappelons le raisonnement suivant de la relativité générale. Deux particules massives initialement situées en un point donné de l'espace suivront des trajectoires différentes, en fonction de l'intensité de leur vitesse initiale: par exemple, l'une des particules peut échapper au champ gravitationnel de la Terre et pas l'autre. Donc ces particules ne se déplacent pas le long de géodésiques de l'espace à trois dimensions. En revanche, dans l'espace-temps de dimension 4, les trajectoires des deux particules ne sont pas initialement tangentes, et donc la possibilité qu'elles suivent des géodésiques de l'espace-temps ne peut pas être exclue par cette expérience. En fait, la théorie de la relativité générale affirme que la trajectoire d'une telle particule soumise uniquement à la gravité est effectivement une géodésique de l'espace-temps, pourvu que ce dernier soit muni de la métrique lorentzienne convenable.

Supposons maintenant que nos particules possèdent une charge électrique et soient plongés dans un champ électromagnétique. Même si leurs trajectoires sont initialement tangentes, leurs trajectoires différeront ensuite. Ainsi, la géométrisation de

la force électromagnétique exige une dimension supplémentaire, une “dimension de charge”. Certains arguments physiques (Kaluza, Klein) indiquent que, dans le cas des *électrons-positrons*, l’espace de dimension 5 qui en résulte est en fait un fibré en cercles (ou en droites complexes) au-dessus de l’espace-temps.

(En théorie quantique des champs, une particule est caractérisée par une fonction d’état  $\psi$ , qui est une section du fibré en cercles. L’état interne de la particule en un point  $p$  de l’espace-temps est reflété par la valeur  $\psi(p)$ . Mais les théories de jauge ici discutées fournissent d’abord un modèle classique des interactions fondamentales, selon les idées de Yang-Mills. Ce modèle est un prérequis pour tenter de comprendre son analogue quantique.)

Le groupe unitaire  $U(1) = \{e^{iq}, q \in \mathbb{R}\}$  agit sur l’état interne par transformation de phase ( $\psi \mapsto e^{iq}\psi$ ) et est appelé le *groupe de symétrie interne* de la particule. Le champ électromagnétique modifie l’état interne de la particule quand celle-ci se meut dans l’espace-temps.

Associations au potentiel  $A$  la 1-forme différentielle  $p$  à valeurs complexes et définie sur  $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$  par :

$$p(x, \psi) : T_{(x, \psi)}(\mathbb{U} \times \mathbb{C}) \simeq \mathbb{U} \times \mathbb{C} \rightarrow T_{\psi}\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}, \quad (\dot{x}, \dot{\psi}) \mapsto A(x)\dot{x} + \dot{\psi}.$$

Le noyau  $\ker p$  est un champ  $\xi$  de plans de dimension 4, qui sont chacun le graphe de la 1-forme  $-A(x)$ .  $\xi$  est une *connexion*,  $p$  la *forme de connexion* et  $A$  le *symbole de Christoffel* de  $\xi$ . On représente habituellement la projection  $\mathbb{U} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{U}$  verticalement, et un vecteur  $(\dot{x}, \dot{\psi})$  de  $\xi$  est alors qualifié d’*horizontal*.

Soit maintenant  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}$  une ligne d’univers parcourue par la particule chargée.

**Lemma 11.** *Quel que soit l’état interne  $\psi_0 \in \mathbb{C}$  de la particule à l’instant  $t = 0$ , il existe un unique chemin  $\Gamma = \Gamma_{\psi_0} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U} \times \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto (\gamma(t), \psi(t))$  (qui relève donc  $\gamma$ ) partant de  $(\gamma(0), \psi_0)$  et tel que  $\dot{\Gamma}(t) \in \xi(\Gamma(t))$  ( $\forall t \in [0, 1]$ ).*

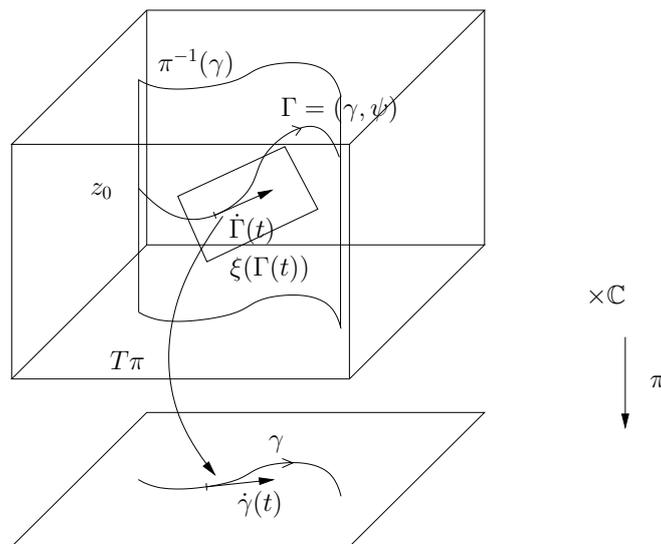


FIGURE 3. Définition du transport horizontal

L'application  $\mathcal{T}_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\psi(0) \mapsto \psi(1)$  est le *transport parallèle* associé à la connexion  $\xi$  et au chemin  $\gamma$ . La théorie quantique des champs affirme que

$\mathcal{T}_\gamma$  régit l'évolution de l'état interne  $\psi$  d'une particule se mouvant le long de la ligne d'univers  $\gamma$ .

Démontrons le lemme. Comme  $\xi(x, \psi)$  est transverse à la projection (constante)

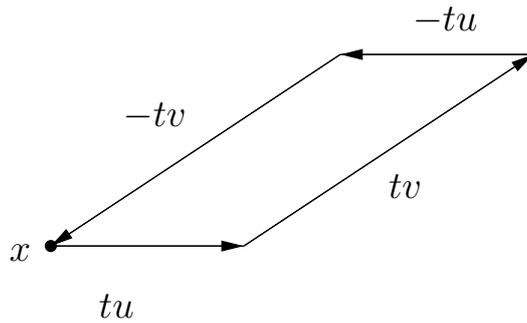
$$\pi(x, \psi) : T_{(x, \psi)}(\mathbb{U} \times \mathbb{C}) \rightarrow T_x \mathbb{U}, \quad (\dot{x}, \dot{\psi}) \mapsto \dot{x},$$

la restriction de  $\pi(x, \psi)$  au plan  $\xi(x, \psi)$  est un isomorphisme linéaire. Notons  $C(x, \psi) : T_x \mathbb{U} \rightarrow \xi(x, \psi) \subset T_{(x, \psi)}(\mathbb{U} \times \mathbb{C})$  l'isomorphisme inverse, (*isomorphisme de relèvement horizontal*). A chaque instant  $t$  et pour tout  $\psi \in \mathbb{C}$  on peut relever le vecteur  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{U}$  en un vecteur horizontal  $C(\gamma(t), \psi) \cdot \dot{\gamma}(t) \in \xi(\gamma(t), \psi)$ . Ce relèvement définit un champ de vecteurs dans la sous-variété  $\{\pi^{-1}(\gamma(t)), t \in [0, 1]\}$ , donc aussi un champ de vecteurs dépendant du temps sur  $\mathbb{C}$ . D'après la formule de Taylor au premier ordre, il en existe une unique courbe intégrale partant de la condition initiale  $\psi_0$  :

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t -A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \psi_0 - \int_\gamma A.$$

**Le champ électromagnétique comme courbure.** Remarquons que le transport parallèle  $\mathcal{T}_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dépend non seulement des extrémités  $z_0, z_1$  du chemin  $\gamma$  suivi, mais a priori de  $\gamma$  lui-même. En particulier, une question importante est de déterminer la nature de  $\mathcal{T}_\gamma$  dans le cas où  $\gamma$  est un lacet fermé ( $\gamma(0) = \gamma(1)$ ) : l'état interne de la particule est-il modifié après le parcours d'une ligne d'univers fermée ?

Quels que soient  $t \in \mathbb{R}$  assez petit,  $x \in \mathbb{U}$  et  $u, v \in T_x \mathbb{U}$ , soit  $\gamma_{tu, tv}^x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}$  le parallélogramme ci-dessous paramétré à vitesse constante :



**Lemma 12.** *Quel que soit  $z \in \mathbb{C}$ , le déplacement vertical normalisé*

$$\Delta z_{tu, tv} = \frac{1}{t^2} (\mathcal{T}_{\gamma_{tu, tv}^x}(z) - z)$$

*possède une limite  $R_x(u, v)$  quand  $t$  tend vers 0. De plus, cette limite définit une 2-forme différentielle  $R$  sur  $\mathbb{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , la courbure de  $\xi$ .*

En géométrie riemannienne, la métrique possède une connexion privilégiée dans le fibré tangent, la *connexion de Levi-Civita*, dont la courbure au sens précédent coïncide avec le tenseur de courbure de Riemann.

**Definition 74** La connexion  $\xi$  est *intégrable* si au voisinage de tout point de  $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$  il existe une partition de  $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$  en sous-variétés de dimension 4 dont  $\xi$  soit la famille des espaces tangents.

Si  $\xi$  est intégrable, l'état interne de la particule chargée est contraint par les feuilles de la partition, donc  $R = 0$ . Nous allons voir que ce n'est jamais le cas en présence d'un champ électromagnétique.

**Proposition 19.** *La forme électromagnétique  $F$  est la courbure de la connexion dont le potentiel  $A$  est le symbole de Christoffel.*

Le lemme et la proposition résultent tous deux directement du théorème de Stokes. En effet, notons  $\mathcal{P}_{tu,tv}^x$  le parallélogramme orienté bordé par  $\gamma_{tu,tv}^x$ . On a

$$t^2 \Delta z_{tu,tv} = \int_{\gamma_{tu,tv}^x} A = \int_{\mathcal{P}_{tu,tv}^x} dA = \int_{\mathcal{P}_{tu,tv}^x} F.$$

Donc

$$\Delta z_{tu,tv} \rightarrow \langle F_x, u \wedge v \rangle$$

quand  $t$  tend vers 0.

**Remark 75** Le groupe unitaire  $U(1)$  modélise l'état interne d'un électron-positron ou la polarisation d'un photon.

Dans le cas où le groupe de symétries internes d'une particule est non commutatif, la courbure prend l'expression plus compliquée  $F = dA + A \wedge A$ .

Par exemple, le champ nucléonique, décrivant l'état interne de protons et de neutrons (soumises à l'interaction forte), est opéré par le *groupe de symétrie isotopique*  $SU(2)$ .

L'état interne des quarks est un triplet de couleurs, sur lequel agit le *groupe de symétrie chromatique*  $SU(3)$ , etc. Cf. [1, 3]

Si l'on interprète  $A$  comme une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie commutative  $\mathfrak{gl}(1, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$  (sur laquelle le crochet est nul) ou, mieux, dans l'algèbre de Lie commutative  $\mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbf{R}$  du groupe unitaire  $U(1)$ , le champ de jauge  $F$  apparaît comme la forme de courbure de la connexion dont le potentiel  $A$  est la forme. Les transformations de jauge sont exactement les transformations des formes de connexion dans diverses trivialisations. Le groupe  $U(1)$  est le *groupe de symétrie interne* du champ matériel associé à  $F$ , soit le champ bispinoriel de Dirac formé d'électrons et de positrons. Ce groupe de symétrie interne agit sur la structure interne supposée de ces particules. C'est le groupe  $U(1)$  pour le champ électromagnétique, qui agit sur la phase des électrons-positrons (par l'action  $\psi \mapsto e^{iq}\psi$ ) ; c'est le groupe  $SU(2)$  pour le champ nucléonique, qui agit sur la *spin isotopique* des protons et des neutrons ; c'est le groupe  $SU(3)$  pour le champ de quarks, qui agit sur un triplet de *couleurs*, etc. Quand une particule évolue dans l'univers suivant deux lignes d'univers distinctes d'origine  $\mathbf{x}$  et d'extrémité  $\mathbf{y}$ , ses états internes finaux dépendent du chemin suivi en général. Physiquement, on attribue cette différence à l'action du champ de jauge, et, géométriquement, la cause en est la transformation du groupe d'holonomie  $G = U(1), SU(2), SU(3) \dots$  que subit le vecteur d'état.

En général l'équation de Maxwell intrinsèque  $dF = 0$  a pour analogue l'équation de Bianchi différentielle et l'analogue de l'équation de Maxwell extrinsèque  $d *$

$F = 0$  est l'équation de Yang-Mills. (Ainsi, les champs de jauge ne sont pas des connexions quelconques sur  $\mathbf{R}^4$ , mais celles qui vérifient ces équations.) La nature physique des champs de jauge exige en outre qu'ils s'annulent à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F = 0.$$

Autrement dit,  $F$  se prolonge sur la compactification  $\mathbf{S}^4 = \mathbf{R}^4 \cup \{\infty\}$  de  $\mathbf{R}^4$  en prenant la valeur 0 à l'infini. Lu dans les coordonnées stéréographiques de pôle  $e_4$ , le potentiel  $A$  est une forme différentielle  $A^+$  sur la sphère épointée  $U^+ = \mathbf{S}^4 \setminus \{e_4\}$  et la condition d'annulation à l'infini est remplie si et seulement si il existe sur la sphère épointée  $U^- = \mathbf{S}^4 \setminus \{-e_4\}$  une forme différentielle  $A^-$  qui soit nulle en  $e_4$  et telle qu'il y ait, sur  $U^+ \cap U^- = \mathbf{S}^4 \setminus \{\pm e_4\} \simeq \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ , équivalence de jauge entre  $A^+$  et  $A^-$ . Dans  $\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ , on doit avoir

$$A^+ = g^{-1}A^-g + g^{-1}dg$$

où  $g$  est une application différentiable  $\mathbf{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

L'application  $g$  vue comme une fonction  $\mathbf{S}^4 \setminus \{\pm e_4\} \rightarrow \mathfrak{g}$  est un cocycle de recouvrement à deux éléments  $\{U^\pm\}$  de  $\mathbf{S}^4$  sur le groupe  $G$ , si bien qu'elle définit un  $G$ -fibré principal  $\xi$  au-dessus de  $\mathbf{S}^4$ . Les potentiels  $A^\pm$  sont les formes d'une connexion  $\nabla$  sur  $\xi$  et le champ  $F$  est la forme de courbure de  $\nabla$  (a priori sur  $U^+ = \mathbf{S}^4 \setminus \{e_4\}$ , mais la forme de courbure de  $\nabla$  est nulle en  $e_4$ ).

Chaque champ possède un invariant, classe d'homotopie des applications  $g : \mathbf{S}^4 \rightarrow \mathfrak{g}$ . Dans le cas du groupe  $SU(2) = \mathbf{S}^3$ , le groupe d'homotopie  $\pi_4(\mathbf{S}^3)$  est le groupe libre engendré par la suspension de la fibration de Hopf, et cet invariant est donc caractérisé par un entier relatif  $k$ , le degré de  $g$ , dont l'opposé est la *charge topologique*.

Il existe un procédé d'élimination des mystérieuses équations de Yang-Mills, qui consiste à se borner aux champs autoduaux ou anti-autoduaux, c'est-à-dire pour lesquels

$$*F = \pm F.$$

Dans ce cas, l'équation de Yang-Mills devient l'équation de Bianchi et est automatiquement vérifiée. Ainsi, les potentiels des champs (anti-)autoduaux sur  $\mathbf{R}^4$  sont les connexions sur les fibrés principaux au-dessus de  $\mathbf{S}^4$  qui s'annulent au pôle  $e_4$  et dont la forme de courbure est (anti-)autoduale. Si  $G = SU(2)$ , les champs autoduaux de charge positive et les champs anti-autoduaux de charge négative sont les *multi-instantons*. Un multi-instanton de charge  $k$  est un *k-instanton*.

Les champs de Yang-Mills  $A$  sont les points critiques de la *fonctionnelle de Yang-Mills*

$$A \mapsto \|F_A\| = \int_{\mathbf{S}^4} F_A \wedge *F_A.$$

Calcul de la charge en fonction de  $F_A$ , construction explicite des multi-instantons  $F_{\lambda,b}$ .

**References.**

[1] J.-P. Bourguignon. Yang-Mills theory: the differential geometric side. In *Differential geometry (Lyngby, 1985)*, volume 1263 of *Lecture Notes in Math.*, pages 13–54. Springer, Berlin, 1987.  
 [2] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1990.